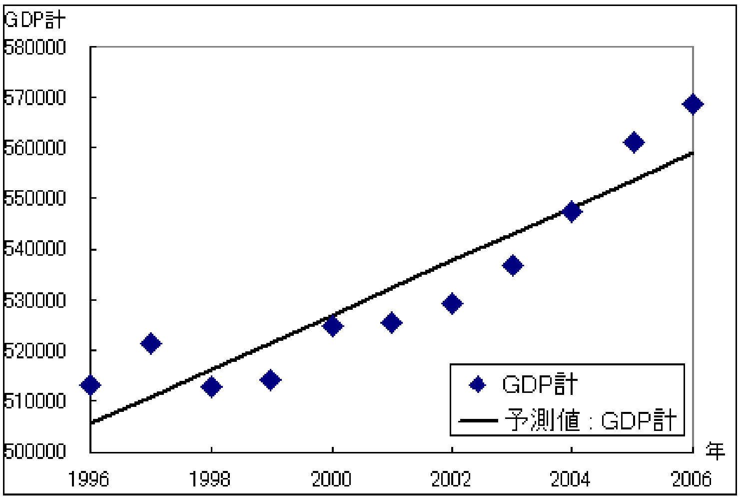
経済情報処理

GDP 産業計のデータに直線を当てはめる

データ

（1996,Y_0）、（1997,Y_1）、

（1998,Y_2）、…、(2006,Y_{10})



直線の方程式

$Y = a + bX$

$\Rightarrow \quad Y_i = a + bX_i$

$X_i = 1996, 1997, \ldots$

・X_i と $T_i = 1,2,3,\cdots$ との違いは？

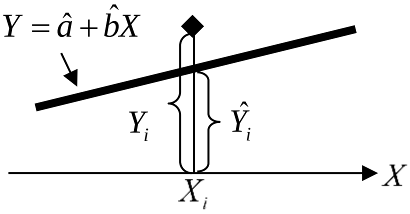
$T_i = X_i - 1995 \quad \rightarrow \quad X_i = 1995 + T_i$

$Y_i = a + bX_i = a + b(1995 + T_i) = a + 1995b + b\,T_i$

定数の推定

$\hat{a}, \hat{b}$ ： a, b の推定値

$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i$ 　　（注．$\hat{Y}_i$ は推定値、Y_i は観測値）



最小二乗法

$\sum\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = \sum\left(Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i\right)^2$ の値が最も小さくなるような $\hat{a}, \hat{b}$ を求める。

$$\hat{b} = \frac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}、\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X}$$

$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ を（回帰）残差、 $\sum e_i^2$ を残差の二乗和という

決定係数 R²

$$\sum (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum e_i^2 \qquad \text{ここで、} \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i$$

全変動　　　説明できた　　説明できなかった

　　　　　　　変動　　　　　　　変動

$$R^2 = \frac{\sum \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2}{\sum \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

$0 \leqq R^2 \leqq 1$（R^2 は Y_i と X_i の相関係数の２乗）

Excel による回帰分析

Y（被説明変数、従属変数、内生変数）

GDP ＝ a ＋ b 年

X（説明変数、独立変数、外生変数）

年に対する係数

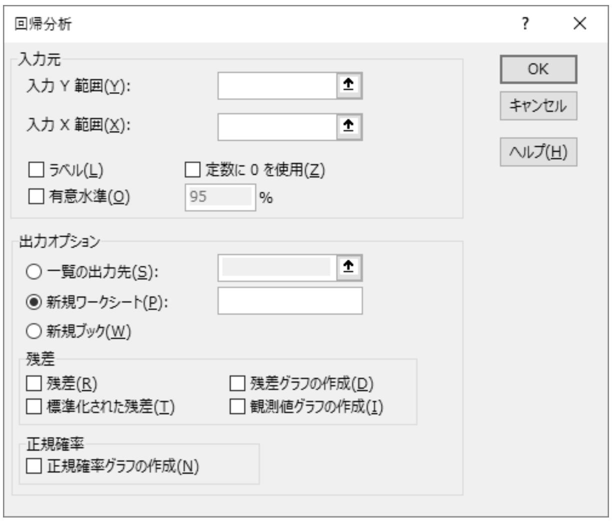
切片（定数項）

データは列方向に

（最初にラベルがあった方が分かりやすい）

Excel で回帰分析を行うには、ツール(T) ⇒ 分析ツール（2007 以降の場合は、データのリボン右端に 分析ツール がある）を指定し、開いたダイアログボックスで回帰分析を指定する。分析ツールが現れない場合は、ヒストグラムのところで説明した要領で登録する。

	A	B
1	年	GDP計
2	1996	513287.5
3	1997	521606.5
4	1998	512773.9
5	1999	514005.9
6	2000	524977.5
7	2001	525275.6
8	2002	529183.5
9	2003	536633.3
10	2004	547492.3
11	2005	561087.1
12	2006	568466.0



概要								
回帰統計								
重相関 R	0.92195							
重決定 R2	0.849992							
補正 R2	0.833324							
標準誤差	7843.135							
観測数	11							
分散分析表								
	自由度	変動	分散	測された分散	有意 F			
回帰	1	3.14E+09	3.14E+09	50.99663	5.42E-05			
残差	9	5.54E+08	61514772					
合計	10	3.69E+09						
	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
切片	-1E+07	1496377	-6.78549	8.04E-05	-1.4E+07	-6768609	-1.4E+07	-6768609
年	5340.281	747.8136	7.141192	5.42E-05	3648.609	7031.953	3648.609	7031.953

一般の回帰分析

・$Y_i = a + bX_i$ において、X_i は 0,1,2,…といった連続数だけ？

・Y_i の要因となるものならば

例　GDP=a+b 人口

この式の意味は、人口によって GDP が決定するという因果関係

厳密な定義

$Y_i = a + bX_i + u_i$

Y_i は基本的には X_i で決まるが、確率的に決まる u_i による誤差はある

u_i を誤差項（攪乱項）

最小二乗法で望ましい結果が出る条件

・X_i は確率変数でなく、確定した値

・u_i は確率変数で期待値が 0

・u_i の分散は i によらず一定

・異なる誤差項は無相関

回帰分析の結果の見方

・求められた $\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i$ において、例えば、$\hat{b} = 0$ という帰無仮説が棄却できれば

H₀：$\hat{b} = c$、H₁：$\hat{b} \neq c$ という検定を行う。

$t = \dfrac{\hat{b} - c}{s.e.(\hat{b})}$ は自由度 $n-2$ の t-分布に従うことが分かっている。

ここで、$s.e.(\hat{b}) = \dfrac{s}{\sqrt{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}}$、$s = \sqrt{\dfrac{\sum e_i^2}{n-2}} = \sqrt{\dfrac{\sum\left(Y_i - \hat{Y}\right)^2}{n-2}}$ であるが、

これは標準誤差の欄の値である。

従って、適当な c について t の値を計算し、設定した有意水準（多くの場合、1%、5%、10% が用いられる）の元で自由度 $n-2$ の t-分布表から棄却できるかどうかの両側検定を行えばよい（実は、Excel には t-分布の値を求める関数があり、それを用いればわざわざ t-分布表を用いる必要はないが、ここでは省略）。また、必要ならば対立仮説を H₁：$\hat{b} < c$ などとして、片側検定を行ってもよい。

H₀：$\hat{b} = 0$ という検定はよく行うので、$t = \dfrac{\hat{b}}{s.e.(\hat{b})}$ の値は出力の t の部分に表示されている。更に、その隣の P-値 というのは、自由度 $n-2$ の t-分布において $|t|$ よりも大きい（両側）部分の確率となっている（つまり、P-値 が例えば 0.01 よりも小さければ、有意水準 1% の両側検定で棄却できることを意味する）。

$\hat{a},\hat{b}$ の求め方

$$\sum\frac{\left(Y_i-\hat{a}-\hat{b}X_i\right)^2}{\partial\hat{a}}=\sum\frac{\partial\left(\left(Y_i-\hat{b}X_i\right)^2-2\left(Y_i-\hat{b}X_i\right)\hat{a}+\hat{a}^2\right)}{\partial\hat{a}}$$

$$=\sum\left(\frac{\partial\left(Y_i-\hat{b}X_i\right)^2}{\partial\hat{a}}-\frac{\partial\left(2\left(Y_i-\hat{b}X_i\right)\hat{a}\right)}{\partial\hat{a}}+\frac{\partial\hat{a}^2}{\partial\hat{a}}\right)$$

$$=\sum\left(0-2\left(Y_i-\hat{b}X_i\right)+2\hat{a}\right)$$

$$=-2\sum\left(Y_i-\hat{b}X_i\right)+2\sum\hat{a}=-2\sum Y_i+2\hat{b}\sum X_i+2n\hat{a}=0$$

$$\sum\left(\frac{\partial\left(\left(Y_i-\hat{a}-\hat{b}X_i\right)^2\right)}{\partial\hat{b}}\right)=\sum\left(\frac{\partial\left(\left(Y_i-\hat{a}\right)^2-2\left(Y_i-\hat{a}\right)\hat{b}X_i+\hat{b}^2X_i^{\,2}\right)}{\partial\hat{b}}\right)$$

$$=\sum\left(\frac{\partial\left(Y_i-\hat{a}\right)^2}{\partial\hat{b}}-\frac{\partial\left(2\left(Y_i-\hat{a}\right)X_i\hat{b}\right)}{\partial\hat{b}}+\frac{\partial X_i^{\,2}\hat{b}^2}{\partial\hat{b}}\right)$$

$$=\sum\left(0-2\left(Y_i-\hat{a}\right)X_i+2X_i^{\,2}\hat{b}\right)$$

$$=-2\sum\left(Y_iX_i-\hat{a}X_i\right)+2\left(\sum X_i^{\,2}\hat{b}\right)$$

$$=-2\sum Y_iX_i+2\left(\sum X_i\right)\hat{\beta}_1+2\left(\sum X_i^{\,2}\right)\hat{b}=0$$

結局、

$$\begin{cases} n\hat{a}+\left(\sum X_i\right)\hat{b}=\sum Y_i & \cdots(1)\\ \left(\sum X_i\right)\hat{a}+\left(\sum X_i^{\,2}\right)\hat{b}=\sum Y_iX_i & \cdots(2)\end{cases}$$

という連立方程式を解いて、$\hat{a}$ 及び $\hat{b}$ を求めればよいということになる。

$(1)\times\sum X_i-(2)\times n$

$$\begin{array}{rl} & n\left(\sum X_i\right)\hat{a}+\left(\sum X_i\right)^2\hat{b}=\left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)\\ -\big) & n\left(\sum X_i\right)\hat{a}+n\left(\sum X_i^{\,2}\right)\hat{b}=n\sum X_iY_i\\ \hline & \left(\left(\sum X_i\right)^2-n\sum X_i^{\,2}\right)\hat{b}=\left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)-n\sum X_iY_i\end{array}$$

ここで、$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$、$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i$ とすると、

$$n\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = n\sum\left(X_i{}^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2\right) = n\sum X_i{}^2 - 2n\bar{X}\sum X_i + n\sum \bar{X}^2$$

$$= n\sum X_i{}^2 - 2n^2\bar{X}^2 + n^2\bar{X}^2 = n\sum X_i{}^2 - n^2\bar{X}^2 = n\sum X_i{}^2 - n^2\cdot\frac{1}{n^2}\left(\sum X_i\right)^2$$

$$= n\sum X_i{}^2 - \left(\sum X_i\right)^2 = -\left(\left(\sum X_i\right)^2 - n\sum X_i{}^2\right)$$

$$\begin{aligned}
n\sum\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right) &= n\sum\left(X_iY_i - X_i\bar{Y} - \bar{X}Y_i + \bar{X}\bar{Y}\right)\\
&= n\sum X_iY_i - n\bar{Y}\sum X_i - n\bar{X}\sum Y_i + n\sum \bar{X}\bar{Y}\\
&= n\sum X_iY_i - n^2\bar{X}\bar{Y} - n^2\bar{X}\bar{Y} + n^2\bar{X}\bar{Y}\\
&= n\sum X_iY_i - n^2\bar{X}\bar{Y}\\
&= n\sum X_iY_i - n^2\frac{1}{n}\left(\sum X_i\right)\frac{1}{n}\left(\sum Y_i\right)\\
&= n\sum X_iY_i - \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right) = -\left(\left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right) - n\sum X_iY_i\right)
\end{aligned}$$

よって、$\hat{b} = \dfrac{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$

また、(1) を変形すると、

$$\hat{a} = \frac{1}{n}\sum Y_i - \frac{1}{n}\hat{b}\sum X_i = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X}$$

参考文献

縄田　和満（1998)「Excel による回帰分析入門」朝倉書店