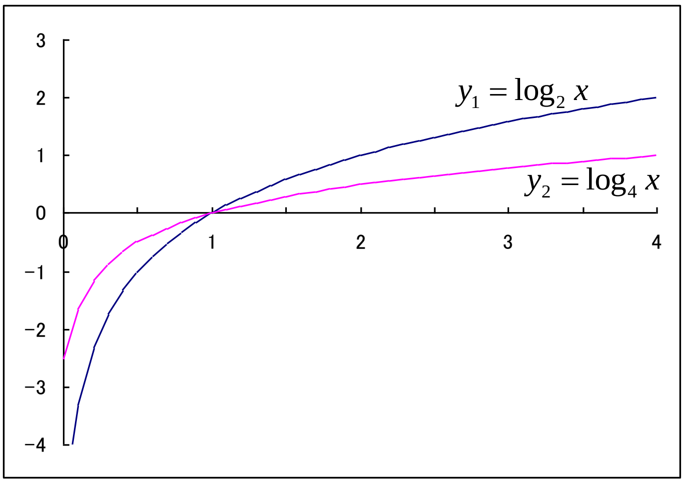
経済情報処理

対数

a を 1 以外の正の定数、$x>0$ とすると、$x=a^y$ を満たす実数 y がただ一つ存在する。この y を a を底とする x の対数と呼び、$y=\log_a x$ で表す（対数関数 $y=\log_a x$ は正の x に対してのみ定義される）。ちなみに、指数関数 $x=a^y$ においても a を底と呼ぶ。

今、底が 2 の対数関数 $y_1=\log_2 x$ と底 4 の対数関数 $y_2=\log_4 x$ のグラフを描くと右のようになる。このように対数関数は、$x\to 0$ で $\log_a x\to -\infty$、$\log_a 1=0$ （$a^0=1$）、$\log_a a=1$ （$a^1=a$）、$x\to\infty$ で $\log_a x\to\infty$ となり、その勾配は x の値が大きくなるにつれ、緩やかになる（以上の性質は底 a がいくつであっても成り立つ）。



更に、底が 2 の対数関数 $y_1=\log_2 x$ と 4 の対数関数 $y_2=\log_4 x$ の間には次のような関係がある。$y_2=\log_4 x$ から $x=4^{y_2}=\left(2^2\right)^{y_2}=2^{2y_2}$、よって、$2y_2=\log_2 x=y_1$（$y_2=\frac{1}{2}y_1$）。

より一般的には a と b を 1 以外の正の定数とすると、$\log_b x=\frac{1}{\log_a b}\log_a x$ となる（上の例では $\log_2 4=2$）。ここで、底は定数であるから $\log_b a$ も定数となり、結局、底の違いは定数倍の違いがあるだけとなっているになる。これは、どのような底を使おうが本質的な差はなく、必要ならば上記の式を使って底を変換すればよいことを意味する。

自然対数の底

対数関数 $\log_a x$ を微分すると、$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\log_a e$ となる。ここで e は $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ により求まる定数であり、その値は $e=2.7182$ という無理数である。$\log_a a=1$ であるから、最初から対数関数の底として e を用いると $\left(\log_e x\right)'=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}$ となり便利である。

このことから、一般に対数の底としては e を用い、この e を自然対数（natural logarithm）の底と呼ぶ。底として自然対数の底 e を使う場合には $\log_e x$ を $\ln x$ と表記する場合もあるし、単に底を省略して $\log x$ と表記する場合もある。

指数関数についても$\left(a^x\right)' = a^x \log_e a$、$\left(e^x\right)' = e^x \log_e e = e^x$となり、$e$を底とする指数関数が多く用いられている。$e^x$を$\exp(x)$と表現することがある。

対数の性質

- $y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$
- $\ln xy = \ln x + \ln y$
- $\ln x^a = a \ln x$
- $\ln \dfrac{x}{y} = \ln xy^{-1} = \ln x - \ln y$
- $x, y > 0$とする。ここで、$x = y$であるならば、$\ln x = \ln y$

$\ln xy = \ln x + \ln y$の証明

$p = \ln x$、$q = \ln y$とすると、$x = e^p$、$y = e^q$

$xy = e^p e^q = e^{p+q}$　よって、$p + q = \ln xy$

ここで、$p = \ln x$、$q = \ln y$であるから、

$\ln xy = p + q = \ln x + \ln y$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \log_e a}$$ の証明

$y = \log_a x$とする。$\log_a\left(x + \Delta x\right)$の値は（$\Delta x > 0$とすると）$y$よりも少しだけ大きくなるので、これを$y + \Delta y$、即ち$y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x)$とする。これより、

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

となる。両辺をΔxで割ると、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

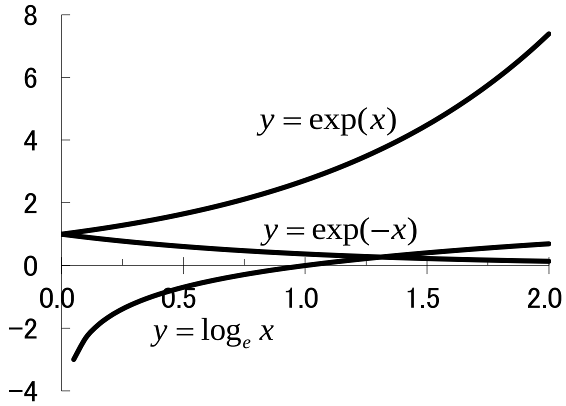
となる。ここで極限を取ると、

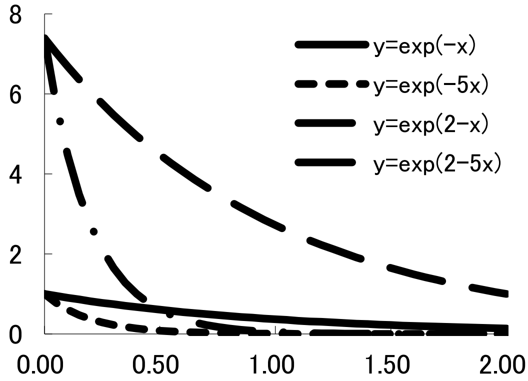
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{1}{x}\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x \to 0}\left[\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] = \frac{1}{x}\log_a \lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

次に、$n = \dfrac{x}{\Delta x}$と置くと、$\Delta x \to 0$のとき、$n \to \infty$となるから、

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$ となり、結局、

$$\frac{dy}{dx} = \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\log_a e$$ となる。





Excel における対数関数、指数関数

・LOG(数値,底)

数値：対数を求める正の実数を指定

底　：対数の底を指定（省略時は、10 と見なされる）

値　：数値に対する対数

例　　LOG(5,2)： $\log_2 5$、　　LOG(5)： $\log_{10} 5$

・LN(数値)

数値：自然対数を求める正の実数を指定

値　：数値に対する自然対数

例　　LN(10)： $\log_e 10 = \ln 10$

・LOG10(数値)

数値：10 を底とする対数（常用対数）を求める正の実数を指定

値　：数値に対する 10 を底とする対数（常用対数）

例　　LOG10(5)： $\log_{10} 5$

・EXP(数値)

数値：e を底とするべき乗の指数を指定

値　：自然対数の底 e の数値乗

例　　EXP(2)： e^2

定率変化

$Y = a + bt$　というのは、一定量で変化するという関係

毎年、一定率で変化する場合は？

最小二乗法を適用するには

GDP計	対数GDP
513287.5	13.1486
521606.5	13.1647
512773.9	13.1476
514005.9	13.1500
524977.5	13.1711
525275.6	13.1717
529183.5	13.1791
536633.3	13.1931
547492.3	13.2131
561087.1	13.2376
568466.0	13.2507

実際の推定

$\mathrm{GDP} = A(1+r)^t$

GDP の対数（Excel の関数は LN）を計算　→　Y

Y = a +b 年 として、a と b の推計

変化率の計算

その他の式の形

$Y = aX^b$

$Y = e^{a+bX}$