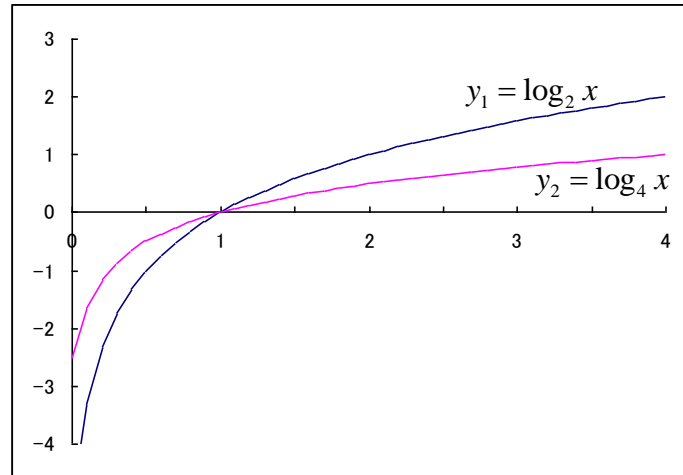


経済情報処理

対数

a を 1 以外の正の定数、 $x > 0$ とすると、 $x = a^y$ を満たす実数 y がただ一つ存在する。この y を、 a を底とする x の対数と呼び、 $y = \log_a x$ で表す（対数関数 $y = \log_a x$ は正の x に対してのみ定義される）。ちなみに、指数関数 $x = a^y$ においても a を底と呼ぶ。

今、底が 2 の対数関数 $y_1 = \log_2 x$ と底 4 の対数関数 $y_2 = \log_4 x$ のグラフを描くと右のようになる。このように対数関数は、 $x \rightarrow 0$ で $\log_a x \rightarrow -\infty$ 、 $\log_a 1 = 0$ ($a^0 = 1$)、 $\log_a a = 1$ ($a^1 = a$)、 $x \rightarrow \infty$ で $\log_a x \rightarrow \infty$ となり、その勾配は x の値が大きくなるにつれ、緩やかになる（以上の性質は底 a がいくつであったも成り立つ）。



更に、底が 2 の対数関数 $y_1 = \log_2 x$ と 4 の対数関数 $y_2 = \log_4 x$ の間には次のような関係がある。 $y_2 = \log_4 x$ から $x = 4^{y_2} = (2^2)^{y_2} = 2^{2y_2}$ 、よって、 $2y_2 = \log_2 x = y_1$ ($y_2 = \frac{1}{2} y_1$)。

より一般的には a と b を 1 以外の正の定数とすると、 $\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \log_a x$ となる（上の例では $\log_2 4 = 2$ ）。ここで、底は定数であるから $\log_b a$ も定数となり、結局、底の違いは定数倍の違いがあるだけとなっているになる。これは、どのような底を使おうが本質的な差はなく、必要ならば上記の式を使って底を変換すればよいことを意味する。

自然対数の底

対数関数 $\log_a x$ を微分すると、 $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ となる。ここで e は $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ に

より求まる定数であり、その値は $e = 2.7182\dots$ という無理数である。 $\log_a a = 1$ であるから、最初から対数関数の底として e を用いると $(\log_e x)' = \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}$ となり便利である。

このことから、一般に対数の底としては e を用い、この e を自然対数 (natural logarithm) の底と呼ぶ。底として自然対数の底 e を使う場合には $\log_e x$ を $\ln x$ と表記する場合もあるし、単に底を省略して $\log x$ と表記する場合もある。

指数関数についても $(a^x)' = a^x \log_e a$ 、 $(e^x)' = e^x \log_e e = e^x$ となり、 e を底とする指数関数が多く用いられている。 e^x を $\exp(x)$ と表現することがある。

対数の性質

- $y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$
- $\ln xy = \ln x + \ln y$
- $\ln x^a = a \ln x$
- $\ln \frac{x}{y} = \ln xy^{-1} = \ln x - \ln y$
- $x, y > 0$ とする。ここで、 $x = y$ であるならば、 $\ln x = \ln y$

$\ln xy = \ln x + \ln y$ の証明

$p = \ln x$ 、 $q = \ln y$ とすると、 $x = e^p$ 、 $y = e^q$

$xy = e^p e^q = e^{p+q}$ よって、 $p + q = \ln xy$

ここで、 $p = \ln x$ 、 $q = \ln y$ であるから、

$\ln xy = p + q = \ln x + \ln y$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log_e a}$ の証明

$y = \log_a x$ とする。 $\log_a(x + \Delta x)$ の値は ($\Delta x > 0$ とすると) y よりも少しだけ大きくなるので、これを $y + \Delta y$ 、即ち $y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x)$ とする。これより、

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)$$

となる。両辺を Δx で割ると、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

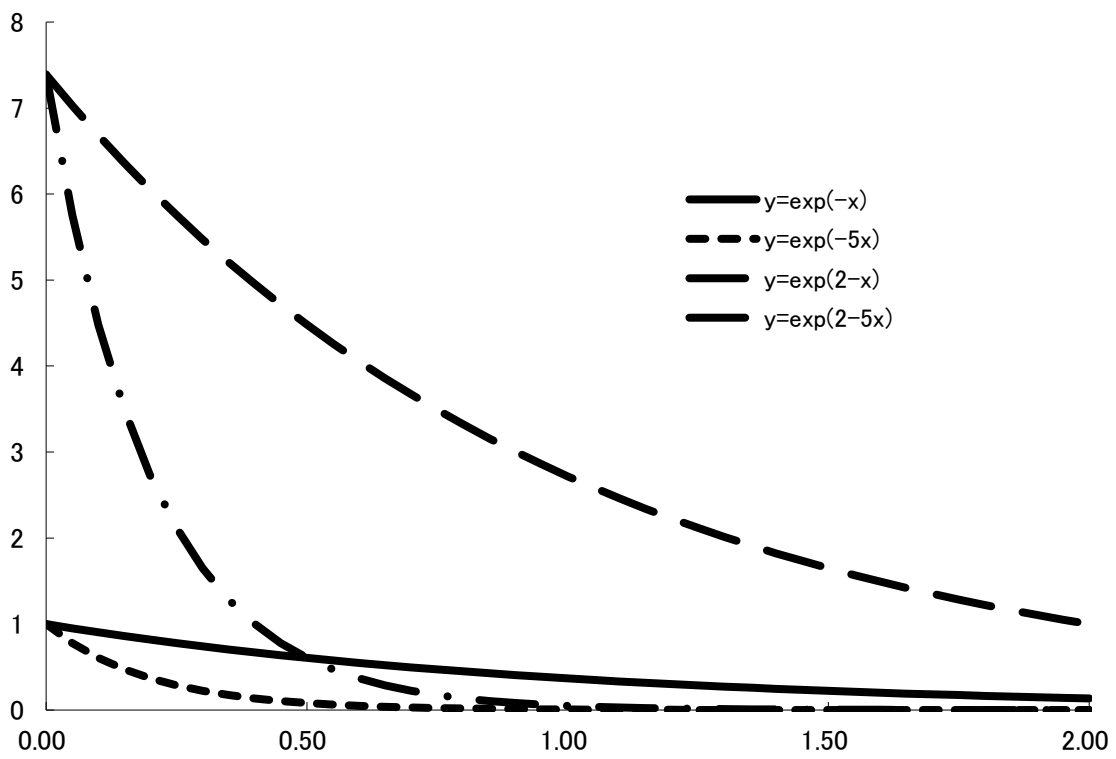
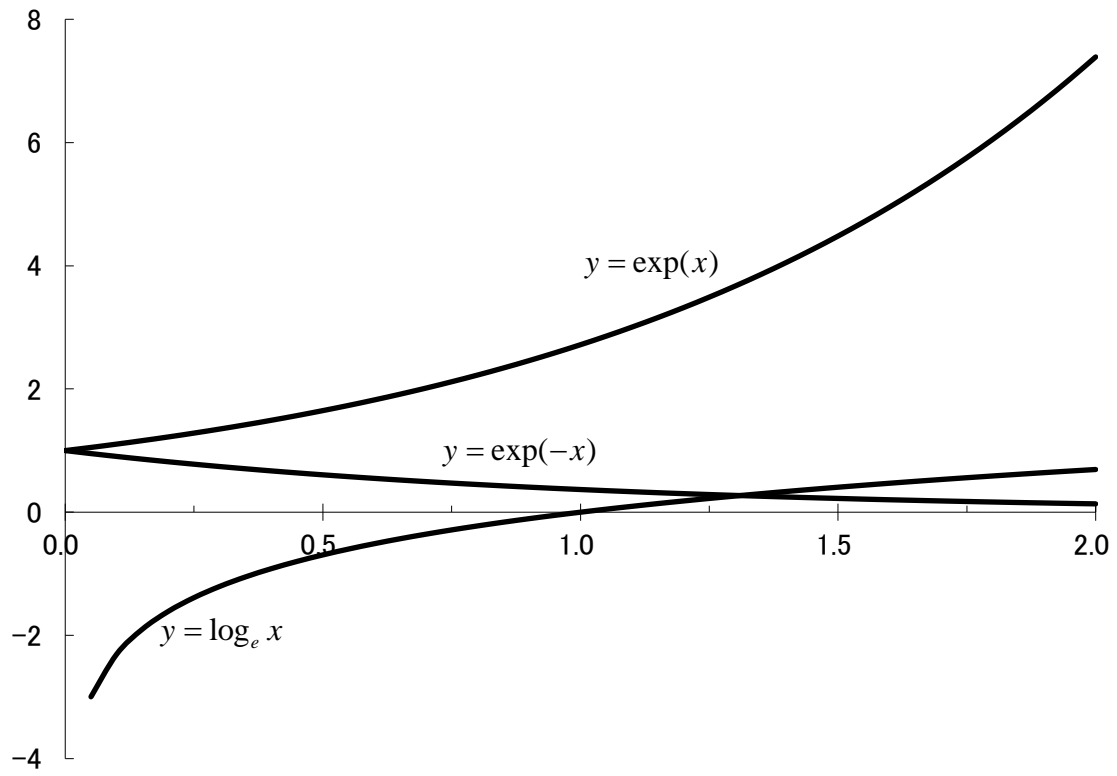
となる。ここで極限を取ると、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right] = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right] = \frac{1}{x} \log_a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

次に、 $n = \frac{x}{\Delta x}$ と置くと、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき、 $n \rightarrow \infty$ となるから、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad \text{となり、結局、}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e \quad \text{となる。}$$



Excelにおける対数関数、指数関数

・LOG(数値,底)

数値：対数を求める正の実数を指定

底：対数の底を指定（省略時は、10と見なされる）

値：数値に対する対数

例 LOG(5,2) : $\log_2 5$ 、 LOG(5) : $\log_{10} 5$

・LN(数値)

数値：自然対数を求める正の実数を指定

値：数値に対する自然対数

例 LN(10) : $\log_e 10 = \ln 10$

・LOG10(数値)

数値：10を底とする対数（常用対数）を求める正の実数を指定

値：数値に対する10を底とする対数（常用対数）

例 LOG10(5) : $\log_{10} 5$

・EXP(数値)

数値： e を底とするべき乗の指数を指定

値：自然対数の底 e の数値乗

例 EXP(2) : e^2

定率変化

$Y = a + bt$ というのは、一定量で変化するという関係
毎年、一定率で変化する場合は？

最小二乗法を適用するには

実際の推定

$$GDP = A(1+r)^t$$

GDP の対数（Excel の関数は LN）を計算 → Y

$Y = a + b$ 年 として、a と b の推計

変化率の計算

課題 9

提出期限 7月24日（水）午後2時まで

or

お楽しみ問題

学務情報システムより World GDP.xlsx のデータを手し、以下の内容のファイルを作成せよ。ヨーロッパ及び北米より 1 カ国、アジア及びオセアニア（除. 日本）から 1 カ国、その他の地域から 2 カ国を他の人と重複しないように選択し、各国の実質 GDP の伸び率を回帰分析により求めよ。また、実質 GDP とその推測値のグラフ及びその国に関する経済的状況（特徴）を含む基本情報も併せて表示されるようにせよ。これらを 1 枚のシートに 1 カ国とし（次ページ参照）、1 枚目のシートには対象とした国名を示す（下図参照）。なお、今回は World GDP のファイルはデータを利用するだけで、提出するファイルは新規ファイルを利用する。

	A	B
1	ヨーロッパ及び北米	○○○
2	アジア及びオセアニア	Japan
3	その他1	△△△
4	その他2	×××

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Japan								
2									
3	年	GDP	対数GDP	推計値					
4	1970	1,951,224,678,934	28.29947833	2,444,418,220,099					
5	1971	2,042,912,571,322	28.34539764	2,502,061,845,397					
6	1972	2,214,793,985,893	28.42618051	2,561,064,807,452					
7	1973	2,392,699,527,043	28.50344335	2,621,459,161,786					
8	1974	2,363,383,219,485	28.49111528	2,683,277,719,843					
9	1975	2,436,449,005,906	28.52156277	2,746,554,066,820					

43	2009	5,470,777,391,092	29.33044184	6,066,722,189,718					
44	2010	5,700,098,114,744	29.37150450	6,209,786,031,173					
45	2011	5,693,518,985,135	29.37034962	6,356,223,566,378					
46	2012	5,778,642,194,555	29.38518986	6,506,114,352,888					
47	2013	5,894,230,516,025	29.40499511	6,659,539,824,363					
48	2014	5,916,317,345,749	29.40873530	6,816,583,334,813					
49	2015	5,996,413,817,473	29.42218271	6,977,330,203,877					
50	2016	6,052,671,805,315	29.43152091	7,141,867,763,180					
51	2017	6,157,658,680,218	29.44871774	7,310,285,403,780					

52

53

54 概要

55

56 回帰統計

57 重相関 R 0.940595291

58 重決定 R² 0.884719502

59 補正 R² 0.882213404

60 標準誤差 0.119063282

61 観測数 48

62

63 分散分析表

	自由度	変動	分散	測された分散	有意 F
64					
65	回帰	1	5.004529902	5.004529902	353.02673
66	残差	46	0.652098997	0.014176065	
67	合計	47	5.656628899		

	係数	標準誤差	t	P-値	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
68								
69	切片	-17.39189687	2.473019904	-7.032655433	8.141E-09	-22.36983	-12.41397	-12.41397
70	年	0.023307982	0.001240512	18.78900552	3.266E-23	0.020811	0.025805	0.025805

71

72

73 GDP伸び率 2.4%

74

75

76

77

78

79

80

81

82

83

84

85

86

87

88

89

90

91

92

93 日本は、ユーラシア大陸の東端に位置し、本州、北海道、九州、

94 四国を始めとする島国である。

95 産業的には、国内市場が大きいため第三次産業が発達している

96 が、製造業も強く、加工貿易が盛んとなっている。特に自動車、エレ

97 クトロニクス、造船、鉄鋼、素材関連の産業は世界的企業を多数擁

98 する。

99 GDPは1980年代後半のいわゆるバブル経済期に増加し、世界第2

100 位の経済規模となっていたが、バブルの崩壊後は経済的に停滞し、

101 2017年現在のGDPは米国、中国に次ぐ第3位となっている。

102

